# 2025 八省联考 11 题——纽结理论

Lucas2011

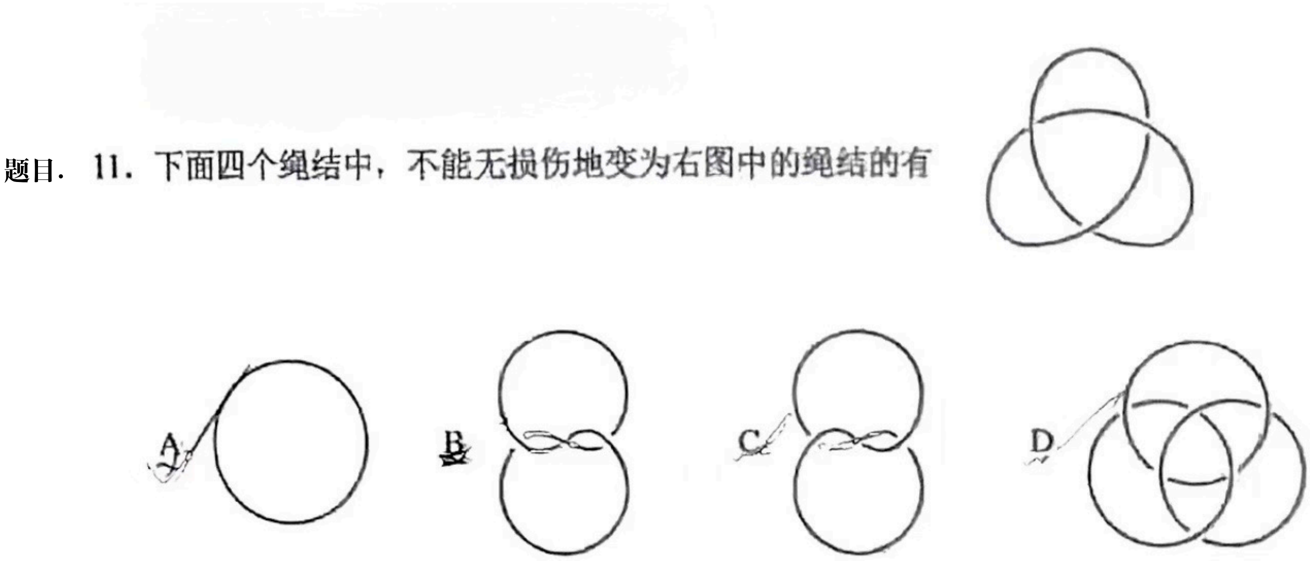



图 1: 八省联考 11 题原题

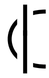
【答案】. ABD

【解析】. 本题涉及纽结理论与拓补学，将简单介绍。

我们有多种变量来描述一个扭结，最简单的一个变量是**交叉点**，即一个扭结中有多少个交点。

扭结可以通过许多方式进行无损伤的变换，具体来说，有以下三种方式（$\boldsymbol{R^3}$）:

1) 扭转 (Twist): 即将  扭转成 

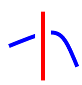
2) 交叉 (Poke): 即将  中左边的竖线向右平移使其交叉，形成 

3) 滑动 (Slide): 即将线从交叉点一侧  移至另一侧 

最简扭结可以通过以上变换得到新的扭结，称为其最简扭结的**投影**。本题就是问我们本题中哪个是题图（三交叉节，Trefoil）的投影。如果两个节无论经过多少次 $R^3$ 变换都不能完全相同，我们才能说明它们是不同的。

那么除了一次次的枚举 $R^3$ 变换，我们有没有一些系统的方法来说明它们不同呢？这个问题也被称为 **"扭结同痕问题"** [1]。千百年来，无数数学家为此努力，终于发现了扭结的一些性质不会随 $R^3$ 变换而改变，这些性质被称为**不变量**。于是，**若两个扭结的任意一个不变量不同，我们就可以断定这两个扭结是不同的**。

常见的不变量有**三色性（进一步地，p-色性）**、**亚历山大多项式**、**HOMFLY-PT 多项式**等，将逐一介绍。

性质 1 (三色性). 扭结中被交叉点分隔开的一小段称为**片段**，一个扭结的所有片段是否能被三种颜色染色，即**三色性**。染色要遵循两条规则：1) 必须使用**至少两种颜色**，因为任何扭结都可以被一种颜色染色；2) 在交点处，颜色要么**完全相同**，要么**完全不同**。也就是说，在交点处不可能出现两种颜色的交点。即不能出现： 

显然，有无三色性不随 $R^3$ 变换而改变。

[1] 也作"扭结等价问题"、"扭结分类问题"。

对于一个扭结，我们只能描述其具有或不具有三色性，而没有其他可能。常见的具有三色性的扭结有三交叉节，如图所示：

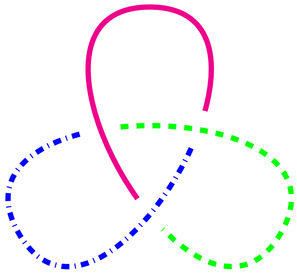


图 2: 三交叉节的三色染色

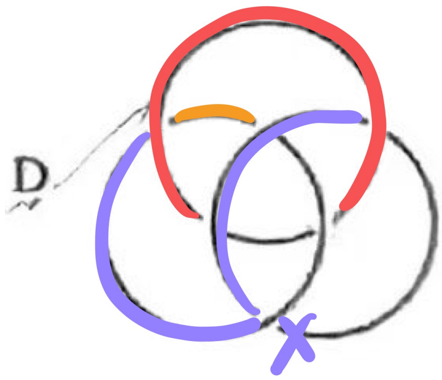



图 3: D 选项无法进行三色染色

知道了这些知识，我们就可以选出 A 选项。由图 2 可知，题图（三交叉节）具有三色性。而 A 是**平凡节（unknot）**，不具有三色性，故 A 图不能无损伤的变为题图。相似地，D 选项也不具有三色性，如图 3 所示，不能无损伤的变为题图。

三色性可以被进一步地推广到 p-色性：选定任意一个质数 $p$，能否在满足下列条件下，为扭结中所有片段标上 0,1,2,...,$(p-1)$。若能，我们称这个扭结有 **p-色性**。1) 必须使用**至少两种颜色**，因为任何扭结都可以被一种颜色染色；2) 在交叉处的**各自绳段的数字标记之和必须在模 p 意义下同余**，记交叉处四段标数为 $b_1$、$b_2$、$t$、$t$（因为总有两边为同一个数），则上述表述可以简化为：

$$b_1 + b_2 \equiv t + t \pmod{p}$$

性质 2 (HOMFLY-PT 多项式). 在纽结理论中，HOMFLY 多项式或 HOMFLY-PT 多项式是一种双变元的纽结多项式；透过变元代换，它可以涵括琼斯多项式与亚历山大多项式在三维的情形。

“HOMFLY” 一名得自该多项式的发现者：**H**oste、**O**cneanu、**M**illett、**F**reyd、**L**ickorish、**Y**etter；“PT” 二字旨在纪念另两位独立发现此结不变量的数学家 **P**rzytycki 与 **T**raczyk。

HOMFLY 多项式 $P_K(\ell, m) = P(K)$ 由下述拆接关系唯一地定义：

$$P(\bigcirc) = 1,$$

$$\ell P(L_{\text{fwd}}) + \ell^{-1} P(L_{\text{bwd}}) + m P(L_{\text{sep}}) = 0$$

其中 fwd、bwd、sep 是交叉点的相对方向，分别与下图中 $L_+$、$L_-$、$L_0$ 相对应。

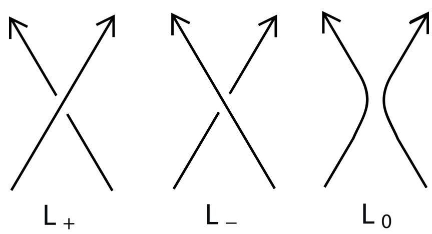



图 4: 交叉点的相对方向

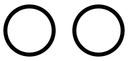
则通过上述式子，通过递归关系就可以求解出任意一个扭结的 HOMFLY-PT 多项式。如果两个扭结的 HOMFLY-PT 多项式不同，则我们可以说这两个扭结不同。以本题 B 选项为例，具体介绍其操作方法。

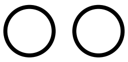
首先选定一个交叉点，我选择最左边的交叉点作为研究对象。令其交叉方向为 fwd 方向，将我们要求的 HOMFLY-PT 多项式记为 $P(L_B)$，待会带入公式时，应将其带入 $P(L_{\text{fwd}})$ 项。

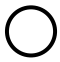
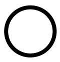
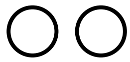
接下来，找 bwd 项。将该交叉点后面的线提前，观察可知其变成了一个平凡节（ $\bigcirc$ ），于是

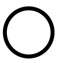
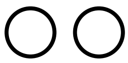
$$P(L_{\text{bwd}}) = P(\bigcirc) = 1$$

然后，找 sep 项。将该交叉点四个绳段断开，再将原来没有连在一起的绳段连接，观察可知其变成了两个平凡链环，于是

$P(L_{\text{sep}}) = P\Big($  $\Big)$

同理，其中 $P\Big($  $\Big)$ 满足：

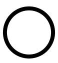
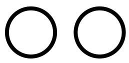
$\ell P($  $) + \ell^{-1}P($  $) + mP\Big($  $\Big) = 0$

而 $P($  $) = 1$，代入可解得 $P\Big($  $\Big) = -\ell \cdot m^{-1} - \ell^{-1} \cdot m^{-1}$

现在万事俱备，只欠东风。将上述分析代入表达式：

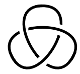
$$\ell P(L_{\text{fwd}}) + \ell^{-1}P(L_{\text{bwd}}) + mP(L_{\text{sep}}) = 0$$

即

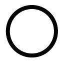
$\ell P(L_B) + \ell^{-1}P($  $) + mP\Big($  $\Big) = 0$

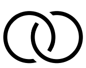
解得 $P(L_B) = 1$，B 选项竟然只是一个平凡节。

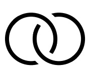
接下来，我们再用相似的方式计算题图的 HOMFLY-PT 多项式：

取左上交叉点作为研究对象，令其交叉方向为 fwd 方向，记三交叉节的 HOMFLY-PT 多项式为 $P\Big($  $\Big)$。

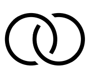
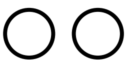
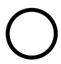
接下来，找 bwd 项。将该交叉点后面的线提前，观察可知其变成了一个平凡节，于是

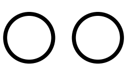
$P(L_{\text{bwd}}) = P($  $) = 1$

然后，找 sep 项。将该交叉点四个绳段断开，再将原来没有连在一起的绳段连接，稍加整理，可知其变成了一个霍普夫链环 $\Big($  $\Big)$。

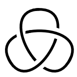
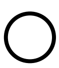
$P(L_{\text{sep}}) = P\Big($  $\Big)$

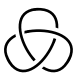
对霍普夫链环应用 HOMFLY-PT 多项式：

$\ell P\Big($  $\Big) + \ell^{-1}P($  $) + mP($  $) = 0$

代入 $P\Big($  $\Big) = -\ell \cdot m^{-1} - \ell^{-1} \cdot m^{-1}$，解得 $P\Big($  $\Big) = -m \cdot \ell^{-1} + m^{-1} \cdot \ell^{-1} + m^{-1} \cdot \ell^{-3}$

再代入三交叉节的 HOMFLY-PT 表达式：

$\ell P\Big($  $\Big) + \ell^{-1}P($  $) + mP\Big($  $\Big) = 0$

解得 $P\Big($  $\Big) = m^2 \cdot \ell^{-2} - 2\ell^{-2} - \ell^{-4}$，与 B 选项的 HOMFLY-PT 多项式不同，所以 B 选项不能无损伤的变为题图。