错位排列与子阶乘

Lucas2011

2025 年 5 月 31 日

本文将从题目出发，以问题为导向，先介绍错位排列的情景及研究方法，再给出其递推公式及通项公式的证法，最后给出子阶乘的定义及性质若干。(可以大幅度简化计算)

题目. 有 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 共 n 个人，他们的座位分别为 $B_1, B_2, \ldots, B_n$。现要求一个人只能坐一个座位，且都不坐自己座位，设数列 $\{a_n\}$ 为其不同的方法种数，试求其递推公式及通项公式。

【解析】. 先来计算递推公式，考虑应用分步乘法原理，将选座位分为两步：

(i) A_1 选座位：根据题意，A_1 除了自己的不能选，其他位置均可选择。故有 $(n-1)$ 种选择。假设选择了座位 B_k；

(ii) A_k 选座位：应用分类加法原理，分为两类：

a. 若 A_k 选择座位 B_1，则接下来的问题转化为"$(n-2)$ 个人不选自己座位，有多少种选法?"，即种数为 a_{n-2}；

b. 若 A_k 不选座位 B_1，则可将 B_1 看作 A_k 原来的那个不能选的座位，此时的问题就化归为"$(n-1)$ 个人不选自己座位，有多少种选法?"，即种数为 a_{n-1}。

综合上述分析，则

$$a_n = (n-1)(a_{n-2} + a_{n-1})$$

再来计算通项公式，这就没有上面计算递推公式那么简单且愉快了。我们不从递推公式推通项，而是从头考虑问题。

记满足 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 坐自己的座位 $B_1, B_2, \ldots, B_n$ 条件的集合为 $F_1, F_2, \ldots, F_n$，记 $|A|$ 表示集合 A 元素的个数。则原题转化为求

$$\left|\overline{F_1} \cap \overline{F_2} \cap \overline{F_3} \cap \cdots \cap \overline{F_n}\right| = \left|\bigcap_{i=1}^{n} \overline{F_i}\right|$$

在这里就需要运用容斥原理进行进一步的转化。

定理 1 (容斥原理). 容斥原理是集合元素计算的一个重要方法。针对不同的形式，可以采取不同的容斥原理形式，这里介绍常用的两种[1]：

容斥原理 *I*：设 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 为 n 个不同的集合，则有

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \leqslant i<j \leqslant n} |A_i \cap A_j| + \cdots + (-1)^{n-1} \left|\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right| \tag{1}$$

此公式称为容斥分式，可以看作是加法原理的推广；

容斥原理 *II*：设 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 为有限集 $\boldsymbol{I}$（全集）的子集，$\overline{A_i}$ 在全集 $\boldsymbol{I}$ 下的补集，则有

$$\left|\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}\right| = |\boldsymbol{I}| - \sum_{i=1}^{n} |A_i| + \sum_{1 \leqslant i<j \leqslant n} |A_i \cap A_j| + \cdots + (-1)^{n} \left|\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right| \tag{2}$$

此公式称为筛法公式，是容斥分式的直接推论。

则由筛法公式 (**??**) 可将原式化为

$$\left|\bigcap_{i=1}^{n} \overline{F_i}\right| = |\boldsymbol{I}| - \sum_{i=1}^{n} |F_i| + \sum_{1 \leqslant i<j \leqslant n} |F_i \cap F_j| + \cdots + (-1)^{n} \left|\bigcap_{i=1}^{n} F_i\right| \tag{3}$$

在本题的情景下，全集的元素数 $|\boldsymbol{I}|$ 即为 n 的全排列 $n!$。

[1] 为了内容的连续性，证明将在附录中给出。

考察展开式 (**??**) 中由 k 个 F_i 取交集的项。令 $\{j_1, j_2, \ldots, j_k\}$ 为 $\{1, 2, \ldots, n\}$ 的含 k 个元素的子集（$k \in [1, n], k \in \mathbb{Z}$），则任意 k 个 F_i 取交集而形成的集合可表示为 $F_{j_1} \cap F_{j_2} \cap \ldots F_{j_k}$，简记为 $\bigcap\limits_{i=1}^{k} F_{j_i}$，一共能取出 C_n^k 个这样的集合。由于轮换对称性，只要 k 一定，所有这样取出的集合 $\bigcap\limits_{i=1}^{k} F_{j_i}$ 的元素个数 $\left|\bigcap\limits_{i=1}^{k} F_{j_i}\right|$ 都应相等，且等于“n 个人排位，其中有 k 个人的位置一定（坐在自己的位置），其余 $(n-k)$ 个人全排列”的种数，即

$$\left|\bigcap_{i=1}^{k} F_{j_i}\right| = (n-k)!$$

而由上文提到，一共能取出 C_n^k 个这样的集合。故式中由 k 个 F_i 取交集的项

$$(-1)^k \sum_{\{j_1, j_2, \ldots, j_k\} \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}} \left|\bigcap_{i=1}^{k} F_{j_i}\right| = (-1)^k \sum_{\{j_1, j_2, \ldots, j_k\} \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}} (n-k)! = (-1)^k C_n^k (n-k)! \tag{4}$$

例如，当 $n = 5, k = 3$ 时，有 $|F_1 \cap F_2 \cap F_3| = |F_1 \cap F_3 \cap F_5| = |F_2 \cap F_3 \cap F_5| = \cdots = (5-3)! = 2$，而这样由 3 个 F_i 取交集而形成的集合一共有 $C_5^3 = 10$ 个，故

$$(-1)^3 \sum_{\{j_1, j_2, j_3\} \subseteq \{1, 2, \ldots, 5\}} \left|\bigcap_{i=1}^{3} F_{j_i}\right| = -1 \times 10 \times 2 = -20$$

通过一个例子，你现在理解了展开式 (**??**) 中的其中一项。让我们对 (**??**) 继续化简

$$(-1)^k \sum_{\{j_1, j_2, \ldots, j_k\} \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}} \left|\bigcap_{i=1}^{k} F_{j_i}\right| = (-1)^k C_n^k (n-k)! = (-1)^k \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot (n-k)! = (-1)^k \cdot \frac{n!}{k!}$$

故原式

$$\left|\bigcap_{i=1}^{n} \overline{F_i}\right| = \frac{n!}{0!} - \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} + \cdots + (-1)^n \cdot \frac{n!}{n!} = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

即

$$a_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

【答案】. $a_n = (n-1)(a_{n-2} + a_{n-1}) \qquad a_n = n! \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$

【注】.

1. *题目中的错位排列问题，定义为没有物体出现在其自然位置上的 n 个物体的排列的数量。记其通项为 $!n$，读作“子阶乘”。满足递推公式 $!n \equiv (n-1)\,[!(n-2) + !(n-1)]$ 和通项公式 $!n \equiv n! \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$；*

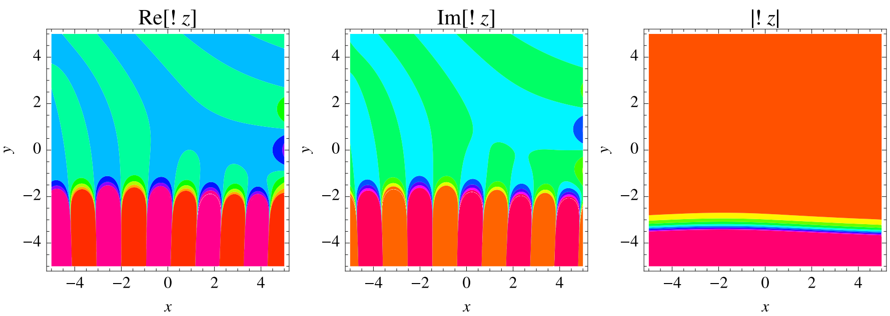
2. *子阶乘 $!n$ 的快速计算方法：M. Hassani 在 2004 年 10 月 28 日的私人通信中给出了以下形式：*

$$!n \equiv \left[\frac{n!}{e}\right] \qquad\qquad !n = \left\lfloor \frac{n!+1}{e} \right\rfloor$$

其中 $[x]$ 为 x 是最接近整数函数（四舍五入），$\lfloor x \rfloor$ 为向下取整函数。

3. *唯一的素数子阶乘是 $!3 = 2$，唯一等于其数字的子阶乘之和的数字是 $148349 = !1 + !4 + !8 + !3 + !4 + !9$；*

4. *子阶乘可以解析延拓到复平面，如下图所示：*



5. 容斥原理的有关证明：

证明. 用数学归纳法证明 (**??**) 式：

(i) 当 $n = 1$ 时，(**??**) 显然成立；

(ii) 若其对于 k 成立，即

$$\left|\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right| = -\sum_{i=1}^{k} (-1)^i \sum_{K\subseteq I_k \wedge |K|=i} \left|\bigcap_{J\in K} J\right|$$

则对于 $k+1$ 时

$$\begin{aligned}
\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| &= \left|\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cup A_{n+1}\right| \\
&= -\sum_{i=1}^{n}(-1)^i \sum_{K\in I_n \wedge |K|=i} |\bigcap_{J\in K} J| + |A_{n+1}| - \sum_{i=1}^{n}(-1)^i \sum_{K\in\{A_1\cap A_{n+1}, A_2\cup A_{n+1}, \cdots, A_n\cup A_{n+1}\}\wedge |K|=i} \left|\bigcap_{J\in K} J\right| \\
&= -\sum_{i=1}^{n}(-1)^i \sum_{K\in I_n \wedge |K|=i} |\bigcap_{J\in K} J| + |A_{n+1}| - \sum_{i=2}^{n+1}(-1)^i \sum_{K\in I_n \wedge |K|=i-1} \left|(\bigcap_{J\in K} J) \cap A_{n+1}\right| \\
&= \left(\sum_{K\in I_{n+1} \wedge |K|=1} \left|\bigcap_{J\in K} J\right|\right) - \sum_{i=2}^{n+1}(-1)^i \left[\sum_{K\in I_n \wedge |K|=i} \left|\bigcap_{J\in K} J\right| + \sum_{K\in I_n \wedge |K|=i-1} \left|(\bigcap_{J\in K} J) \cap A_{n+1}\right|\right] + \sum_{K\subseteq I_{n+1} \wedge |K|=n+1} \left|\bigcap_{j\in K} J\right| \\
&= \left(\sum_{K\in I_{n+1} \wedge |K|=1} \left|\bigcap_{J\in K} J\right|\right) - \sum_{i=2}^{n+1}(-1)^i \sum_{K\subseteq I_{n+1} \wedge |K|=i} \left|\bigcap_{j\in K} J\right| \\
&= -\sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i \sum_{K\subseteq I_{n+1} \wedge |K|=i} |\bigcap_{J\in K} J|
\end{aligned}$$

也成立。

综上所述，由 (i)(ii) 可知，(**??**) 成立。

再由 (**??**) 推出 (**??**) 式：

$$\left|\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}\right| = \left|\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}\right| = |\boldsymbol{I}| - \left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = |\boldsymbol{I}| - \sum_{i=1}^{n} |A_i| + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} |A_i \cap A_j| + \cdots + (-1)^n \left|\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right|$$

□